

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

---

УДК 535.42:517.9

**А. В. БОРОВСКИЙ**

*доктор физико-математических наук, профессор,  
Байкальский государственный университет экономики и права*

**А. Л. ГАЛКИН**

*доктор физико-математических наук,  
Институт общей физики РАН им. А. М. Прохорова*

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФРАКЦИИ НА КЛИНЕ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ УГЛОМ

---

Проведено численное исследование дифракции электромагнитной волны с ТЕ и ТМ поляризациями на идеально-проводящем клине с произвольным углом при вершине. Исследование включает разработку математической модели для расчета амплитуды и интенсивности дифракционного поля. Формулы модели представлены в виде, допускающим автоматическое выделение плоских волн, без выписывания логических условий. Показано, что в области двух отражений решение дифракционной задачи может быть найдено с использованием принципа зеркальной симметрии относительно плоскости симметрии клина. Решение может быть представлено в виде линейной суперпозиции двух решений. Каждое из них соответствует отражению плоской волны по отдельности от верхней и нижней грани клина. Решение задачи построено во всей области физических углов без ограничений на удаленность точки наблюдения от ребра клина. Интенсивность электромагнитного поля рассчитывается с привлечением формул для модуля вектора Умова–Пойнтинга. Исследованы эффекты дифракции и интерференции поля вблизи стенок клина. Обнаружен эффект подавления дифракции электромагнитного поля вблизи поверхности клина для случая скользящего падения ТМ волны.

*Ключевые слова:* строгая теория дифракции; численное моделирование дифракции на клине.

---

**A. V. BOROVSKY**

*Doctor habil. (Physical and Mathematical Sciences), Professor,  
Baikal State University of Economics and Law*

**A. L. GALKIN**

*Doctor habil. (Physical and Mathematical Sciences), Professor,  
General Physics Institute of RAS n.a. A.M. Prokhorov*

## NUMERICAL MODELING OF DIFFRACTION BY A WEDGE WITH AN ARBITRARY ANGLE

---

The paper aims at conducting a numerical study of electromagnetic waves diffraction with TE and TM polarizations by a perfectly conducting wedge with an arbitrary angle at the vertex. The study also contains a developed mathematical model intended for calculating the amplitude and intensity of the diffraction field. The formulas are presented in a way that allows the automatic selection of plane waves without writing logical conditions. It is shown that in the region of two reflections the solution of the diffraction problem can be found by using the principle of mirror symmetry in the plane of the wedge symmetry. The solution can be presented as a linear superposition of two solutions. Each of them corresponds to the reflection of a plane wave separately from the upper and lower faces of the wedge. The solution is constructed in the whole area of physical angles without any distance restrictions imposed at the observation point from the wedge edge. The electromagnetic field intensity is calculated with the formulas for the Umov-Poynting vector. The effects of field diffraction and interference near the wedge walls are scrutinized.

*Keywords:* rigorous diffraction theory; numerical simulation of diffraction by a wedge.

---

Разработка методов решения задач дифракции восходит к трудам [3; 10; 13; 14; 17; 22–24; 26; 27]. Задача дифракции

на клине является классической задачей теоретической и математической физики [11; 12; 21; 29]. Постановка задачи дифрак-

ции на клине в двумерном стационарном случае основана на уравнении Гельмгольца, частными решениями которого являются дифракционные интегралы Зоммерфельда–Франка–Мизеса. Краевая задача для уравнения Гельмгольца может включать условия I рода (задача Дирихле, плоская волна ТЕ поляризации), II рода (задача Неймана, плоская волна ТМ поляризации), III рода (задача смешанного типа с импедансными условиями [2; 18–20]). Краевые задачи дифракции имеют практическую направленность и могут быть использованы для моделирования взаимодействия лазерных пучков с краями металлических оправ и диафрагм. Изучению строгих задач дифракции посвящены также работы [2; 4; 6–9; 15]. Постановка задачи дифракции на клине и некоторые ее следствия описаны в курсе [16]. Во многих работах проводится изучение дифракции в рамках геометрической теории [28; 31; 33] и параболического приближения [22], отметим также ранние аналитические работы времен Зоммерфельда [25; 30; 32].

При построении решений всех трех задач используют дифракционные интегралы. Поскольку период дифракционных интегралов  $T$  связан с углом раствора клина  $\delta$  соотношением  $T = 2\pi\rho = 2(2\pi - \delta)$ , в литературе исследовались в основном случаи целых значений числа:  $\rho = 1 (\delta = \pi)$  — плоскость;  $\rho = 2 (\delta = 0)$  — полуплоскость;  $\rho = 3/2 (\delta = \pi/2)$  — прямоугольный клин.

Целью статьи является разработка некоторых малоизвестных представлений задачи, удобных для проведения численных расчетов, и компьютерное исследование дифракции плоской волны на идеально-проводящем клине с произвольным углом при вершине с граничными условиями I и II рода.

Рассмотрим клин с углом при вершине  $\delta < \pi$  (рис. 1). Случай  $\delta > \pi$  приводит к уголкового отражателю, поэтому здесь не приводится. На клин падает внешняя плоская электромагнитная волна, характеризуемая волновым вектором  $\mathbf{k}$ . В полярной системе координат вектор  $\mathbf{k}$  задается модулем  $k = |\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны, и полярным углом  $\alpha$  (по ряду причин удобнее использовать угол Зоммерфельда  $\gamma = \alpha - \pi$ ); точка наблюдения — модулем радиус-вектора  $r = |\mathbf{r}|$  и полярным углом  $\varphi$ .

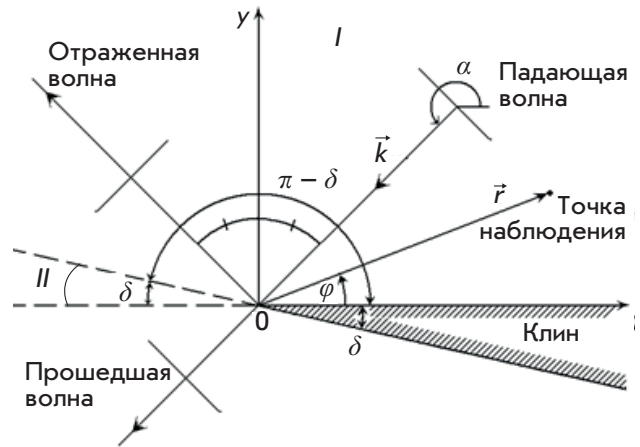


Рис. 1. Дифракция плоской волны на клине в области I

Произвольное электромагнитное поле в двумерном случае можно представить в виде линейной суперпозиции полей, обладающих ТЕ (transverse electric) и ТМ (transverse magnetic) поляризациями [3]. Имеется в виду поперечность электрического или магнитного вектора плоскости падения волны, образованной волновым вектором и перпендикуляром к поверхности отражения. Поэтому особый интерес представляет исследование дифракции электромагнитного поля, обладающего этими двумя поляризациями. В случае ТЕ и ТМ волн действительные векторы напряженности электрического и магнитного полей, параллельных краю клина, определяются выражениями

$$E(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[U_E(\mathbf{r})e^{-i\omega t}];$$

$$H(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[U_H(\mathbf{r})e^{-i\omega t}].$$

Комплексные функции  $U_E(\mathbf{r})$  и  $U_H(\mathbf{r})$  являются решениями краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца. Далее индексы  $E$  и  $H$  опустим.

Выражение для комплексной амплитуды  $U(\mathbf{r})$  падающей плоской волны в полярных координатах имеет вид [14]

$$U_\rho^+(\rho, \theta) = \exp(i\rho \cos \theta); \quad \rho = kr; \quad \theta = \varphi - \gamma.$$

Краевая задача дифракции ставится следующим образом: требуется найти решение двумерного уравнения Гельмгольца

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + U = 0$$

в области углов  $0 < \varphi < 2\pi - \delta$  при любых значениях радиуса  $0 < \rho < \infty$ . На поверхно-

стях клина ставится условие равенства нулю решения (условие I рода для ТЕ волны), либо его производной по углу  $\varphi$  (условие II рода, для ТМ волны)

$$U|_{\varphi=0, \varphi=2\pi-\delta} = 0 \quad \left( \frac{\partial U}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0, \varphi=2\pi-\delta} = 0 \right). \quad (1)$$

Уравнение (1) имеет особые точки  $\rho = 0$  и  $\infty$  поэтому для выполнения условий теоремы единственности на решение  $U$  ставятся интегральные условия Мейкснера и Зоммерфельда [2]:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \rho \int_0^{2\pi-\delta} \operatorname{Im} \left( U^* \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) d\varphi \right\} = 0;$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left\{ \rho \int_0^{2\pi-\delta} \left| \frac{\partial U}{\partial \rho} - iU \right|^2 d\varphi \right\} = 0.$$

В силу линейности уравнения Гельмгольца решение краевой задачи можно разложить на сумму решений геометрической оптики [10; 22] и дифракционной составляющей  $U = U_g + U_d$ .

Частными решениями уравнения Гельмгольца в цилиндрических координатах являются плоские и цилиндрические волны, а также в силу линейности уравнения любые суперпозиции плоских волн в виде контурных интегралов в плоскости комплексных углов. Среди совокупности всех контурных интегралов выделяют «дифракционные интегралы» Зоммерфельда–Франка–Мизеса (ЗФМ), которые на бесконечности стремятся к плоским, либо цилиндрическим разбегающимся волнам.

Исследование свойств дифракционных интегралов ЗФМ проведено в работах [2; 4; 6; 14; 24]. Существует два вида интегралов ЗФМ. Дифракционные интегралы  $U_T^C(\rho, \theta)$  с индексом  $C$  являются гладкими, непрерывными, четными, периодическими функциями с периодом  $T$ . Предполагается, что  $T > 2\pi$ . При  $\rho \rightarrow \infty$  в диапазоне углов  $|\theta| < \pi$ :  $U_T^C(\rho, \theta) \rightarrow e^{i\rho \cos \theta}$ , а в диапазоне углов  $\pi < |\theta| < T/2$ :  $U_T^C(\rho, \theta) \rightarrow 0$ . Дифракционные интегралы с индексами  $D$  в пределах основного периода получают из интегралов с индексами  $C$  вычитанием плоской волны, умноженной на функцию Хэвисайда, и являются кусочно-гладкими функциями. Точки разрывов возникают при значениях углов  $|\theta| = \pi$ :

$$U_T^D(\rho, \theta) = U_T^C(\rho, \theta) - e^{i\rho \cos \theta} \Phi(\pi - |\theta|), \quad (2)$$

$$|\theta| < \frac{T}{2};$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 1/2, & x = 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

В случае произвольных действительных чисел  $\rho = T/2\pi$  справедливо следующее представление в виде рядов Фурье–Бесселя [6; 10; 24]:

$$U_p^C(\rho, \theta) = \frac{1}{\rho} J_0(\rho) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\rho} \exp\left(i \frac{\pi k}{2\rho}\right) \cos\left(\frac{k}{\rho} \theta\right) J_{k/\rho}(\rho). \quad (3)$$

В случае целых  $\rho = n$  значений выражение (3) может быть преобразовано к виду

$$U_n^C(\rho, \theta) = \exp(i\rho \cos \theta) \times \frac{1}{n} \left[ 1 + \sum_{m=1}^{n-1} \cos\left(\theta \left(1 - \frac{m}{n}\right)\right) \exp\left(-i \frac{\pi m}{2n}\right) \times \right. \\ \left. \times \sin\left(\frac{\pi m}{n}\right) \int_0^{\rho} e^{-i\xi \cos \theta} H_{m/n}^{(2)}(\xi) d\xi \right], \quad (4)$$

где  $H_{m/n}^{(2)}(\xi)$  — функция Ханкеля. Доказательство эквивалентности (3) и (4) проведено в работе [6].

Краевые задачи Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца в секторе решаются подбором комбинации дифракционных контурных интегралов, которая удовлетворяла бы краевым условиям, а также условиям на бесконечности и в нуле

$$U(\rho, \varphi, \gamma) = U_T^C(\rho, \varphi - \gamma) \mp U_T^C(\rho, \varphi + \gamma). \quad (5)$$

Здесь знаки минус и плюс соответствуют задачам Дирихле и Неймана, а период  $T$  равен  $T = 2(2\pi - \delta)$ , где  $\delta$  — угол при вершине клина; индексы дополнительно указывают период дифракционного интеграла  $T$  и контур интегрирования  $C$ , согласно [6; 10; 14; 24]. Формула (5) соответствует записи (79.13) из [10].

*Выделение плоских волн.* Решение (5) не является наглядным и требует исследования. Рассмотрим выделение из решения (5) плоских волн, которые остаются при стремлении  $\rho \rightarrow \infty$ . Далее предложим метод, удобный при численных исследованиях. Дифракци-

онные интегралы являются периодическими функциями. Любая периодическая функция удовлетворяет теореме «о понижении периода». Пусть  $U(\theta)$  обладает периодом  $T$ , тогда функция

$$\Psi(\theta) = \sum_{k=1}^m U\left(\theta + \frac{T}{m}k\right)$$

обладает периодом  $T/m$ . Поскольку существуют дифракционные интегралы с периодом, большим  $T$ , то, применив теорему в сторону увеличения периода, можно преобразовать выражение (5) к следующему виду (переменную  $\rho$  опустим):

$$\begin{aligned} U(\varphi, \gamma) &= \left[ U_{2T}^C(\varphi - \gamma) - U_{2T}^C(\varphi + \gamma) \right]_1 + \\ &+ \left[ U_{2T}^C(T + \varphi - \gamma) - U_{2T}^C(T + \varphi + \gamma) \right]_2 = \\ &= U_{2T}^C(\varphi - \gamma) - U_{2T}^C(\varphi + \gamma) - U_{2T}^C(T + \varphi + \gamma) + \\ &+ U_{2T}^C(T + \varphi - \gamma). \end{aligned}$$

Углы падения и наблюдения изменяются в пределах  $0 < \gamma, \varphi < T/2$ . Поэтому аргумент последнего интеграла попадает в интервал углов  $T/2 < T + \varphi - \gamma < 3T/2$ , в пределах которого асимптотика интеграла равна нулю, и, следовательно, интегралы с индексами  $C$  и  $D$  совпадают. В результате получим

$$\begin{aligned} U(\varphi, \gamma) &= U_{2T}^C(\varphi - \gamma) - U_{2T}^C(\varphi + \gamma) - \\ &- U_{2T}^C(T + \varphi + \gamma) + U_{2T}^D(T + \varphi - \gamma). \end{aligned} \quad (6)$$

Воспользовавшись формулой (2), перепишем выражение (6):

$$\begin{aligned} U(\rho, \varphi, \gamma) &= e^{i\rho \cos(\varphi - \gamma)} \Phi(\pi - |\varphi - \gamma|) - \\ &- e^{i\rho \cos(\varphi + \gamma)} \Phi(\pi - |\varphi + \gamma|) - \\ &- e^{i\rho \cos(T + \varphi + \gamma)} \Phi(\pi - |T + \varphi + \gamma|) + U^D(\varphi, \gamma). \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} U^D(\varphi, \gamma) &= U_{2T}^D(\varphi - \gamma) - U_{2T}^D(\varphi + \gamma) - \\ &- U_{2T}^D(T + \varphi + \gamma) + U_{2T}^D(T + \varphi - \gamma) = \\ &= U_T^D(\rho, \varphi - \gamma) - U_T^D(\rho, \varphi + \gamma). \end{aligned}$$

Здесь выделились три волны геометрической оптики: падающая и две отраженных от верхней и нижней грани клина. Функции Хэвисайда, как легко убедиться, обеспечивают выделение плоских волн в нужных диапазонах углов.

В области I одного отражения от верхней грани клина  $0 < \gamma < \pi - \delta$  третья волна геометрической оптики в (7) отсутствует, так как функция Хэвисайда для нее равна нулю.

В области II двух отражений  $\pi - \delta < \gamma < \pi$  присутствуют все три плоские волны. В области одного отражения от нижней грани клина  $\pi < \gamma < 2\pi - \delta$  в (7) отсутствует вторая геометрическая волна, так как уже для нее функция Хэвисайда будет равна нулю (см. рис. 1). Таким образом, формула (5) обеспечивает автоматическое выделение плоских волн в задаче о клине и приводит к представлению (7).

**Принцип зеркальной симметрии.** В области двух отражений от разных граней решение задачи дифракции на клине может быть проанализировано с использованием принципа зеркальной симметрии. Поскольку клин имеет ось симметрии  $OO'$ , то и решение уравнения Гельмгольца для клина должно быть зеркально-симметричным относительно  $OO'$ .

Свойство симметрии можно использовать для нахождения или интерпретации решения задачи. Падающая волна с волновым вектором  $k$  порождает две волны с волновыми векторами  $k', k''$ , отраженные от двух разных граней клина. Решение задачи дифракции для случая одного отражения от верхней грани клина, порождаемое волновыми векторами  $k, k'$ , определяется (7) с обнуленной третьей волной геометрической оптики

$$\begin{aligned} U(\rho, \varphi, \gamma) &= e^{i\rho \cos(\varphi - \gamma)} \Phi(\pi - |\varphi - \gamma|) - \\ &- e^{i\rho \cos(\varphi + \gamma)} \Phi(\pi - |\varphi + \gamma|) + U^D(\varphi, \gamma); \end{aligned} \quad (8)$$

$$U^D(\varphi, \gamma) = U_T^D(\rho, \varphi - \gamma) - U_T^D(\rho, \varphi + \gamma).$$

Для записи дифракционной добавки, порождаемой падающей  $k$  и  $k''$  отраженной волнами с волновыми векторами  $k$  и  $k''$ , следует зеркально отразить волновые вектора и относительно оси симметрии клина  $OO'$ :  $k, k'' \rightarrow k^*, k''^*$ . Далее следует записать известное для области I дифракционное решение для векторов  $k^*, k''^*$  и зеркально отразить его обратно. Таким способом получим дифракционное решение, порождаемое векторами  $k, k''$ . В силу линейности задачи результирующее дифракционное решение является полусуммой указанных решений.

При зеркальном отражении прямое и зеркально-симметричное решения (рис. 2) связаны соотношением

$$V^*(\rho^*, \varphi^*) = V(\rho^*, 2\pi - \varphi^* - \delta).$$

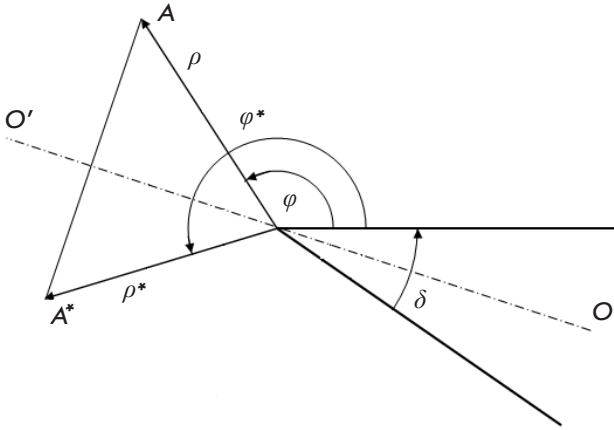


Рис. 2. Свойства зеркального отражения относительно оси симметрии клина  $OO'$

При зеркальном отражении волнового вектора относительно оси симметрии  $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}^*$  угол  $\gamma$  преобразуется следующим образом:  $\gamma \rightarrow \gamma^* = 2\pi - \gamma - \delta = T/2 - \gamma$ . Для угла  $\gamma^*$  общее решение задачи дифракции с физическим отражением от верхней грани клина имеет вид

$$U^D(\rho, \varphi, \gamma^*) = U_T^D(\rho, \varphi - \gamma^*) - U_T^D(\rho, \varphi + \gamma^*). \quad (9)$$

Отразив решение (9) зеркально в обратную сторону и взяв полусумму из (8), получим дифракционную часть решения задачи в области II

$$U^D(\rho, \varphi, \gamma) = \frac{1}{2} \left\{ [U_T^D(\rho, \varphi - \gamma) - U_T^D(\rho, \varphi + \gamma)]_1 + [U_T^D(\rho, \gamma - \varphi) - U_T^D(\rho, T - \varphi - \gamma)]_2 \right\}.$$

Выражения в квадратных скобках описывают дифракционные добавки, вызванные отражениями плоской волны от верхней и нижней грани клина. Это и есть линейное разбиение на две дифракционные задачи. Используя свойства четности и периодичности дифракционных интегралов, легко видеть, что выражения в квадратных скобках совпадают, вследствие чего двойка сокращается. Таким образом, функция  $U^D(\varphi, \gamma)$  в (7) удовлетворяет принципу зеркальной симметрии.

Наблюдаемой величиной в задаче дифракции является интенсивность электромагнитной волны, которая равна модулю вектора Умова–Пойнтинга, усредненного по быстрым осцилляциям электромагнитного поля [3]:

$$I = \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} |\operatorname{Re}(\mathbf{E}\mathbf{H}^*)|,$$

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — стационарные комплексные амплитуды электрического и магнитного полей.

Вычисление вектора Пойнтинга для дифракции ТЕ и ТМ волны представляет отдельную задачу, решение которой представлено, например, в работах [9] и [7]. Конечное выражение для интенсивности в обоих случаях совпадает

$$I = \sqrt{\frac{1}{\rho^2} \left[ \operatorname{Re}U \frac{\partial \operatorname{Im}U}{\partial \varphi} - \operatorname{Im}U \frac{\partial \operatorname{Re}U}{\partial \varphi} \right]^2 + \left[ \operatorname{Re}U \frac{\partial \operatorname{Im}U}{\partial \rho} - \operatorname{Im}U \frac{\partial \operatorname{Re}U}{\partial \rho} \right]^2} \cdot (10)$$

Здесь интенсивность нормирована на интенсивность падающей плоской волны. Особенностью выражения (10) является независимость интенсивности от знака мнимой части решения уравнения Гельмгольца. Это позволяет не следить за знаком комплексной части решения, что несколько упрощает исследование.

Таким образом, в математической модели дифракции на клине с произвольным углом  $\delta < \pi$  при вершине в области физических углов наблюдения и падения плоской волны на клин  $0 < \varphi, \gamma < 2\pi - \delta$  интенсивность (10) однозначно рассчитывается с помощью (3) и (5). Эта модель положена в основу численного моделирования дифракции плоских ТЕ и ТМ волн на клине.

Описание численных методов, применяемых для решения задач дифракции на клине, и некоторые расчеты представлены в [5; 8]. В данной статье рассчитывался дифракционный интеграл с индексом  $S$  методом рядов Фурье–Бесселя. Прямой расчет с использованием (3) потребовал учета не менее 150 членов ряда. На рис. 3 считаются частичные суммы и приводятся графики действительной и мнимой частей для частичных сумм как функций номера  $n$ -числа слагаемых в сумме. Интерполяция на графике используется линейная, значения параметров  $\rho = 3, \theta = \pi/3$ , функция Бесселя взята из библиотеки стандартных программ. Сходимость ряда (3) слабо зависит от числа  $\rho$  в диапазоне  $1 < \rho < 3$  и углов  $\theta$ .

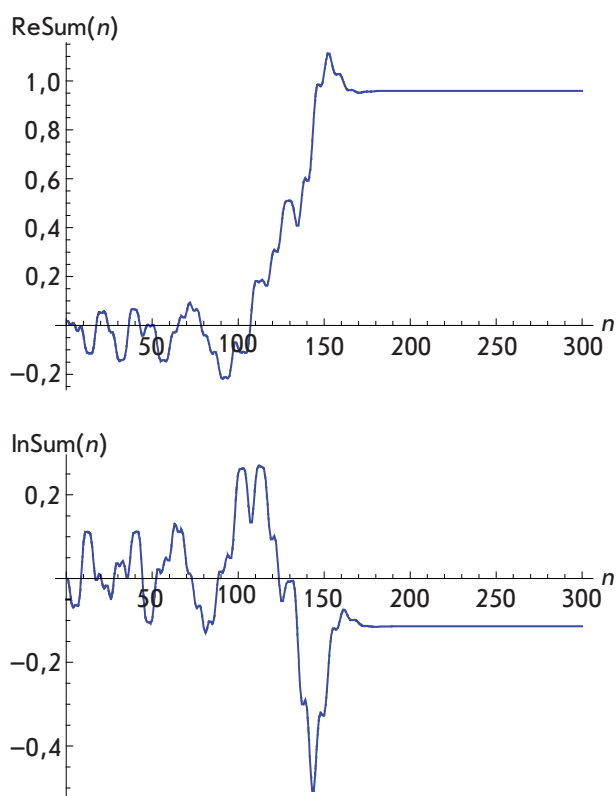


Рис. 3. Частичные суммы ряда (8) как функции числа членов ряда при значениях параметров  $\rho = 3$ ,  $\theta = \pi/3$

Для расчета интенсивности применялись две отличающиеся численные схемы:

- интерполяционная схема по углу  $\varphi$  с центральной разностью для вычисления производных по радиусу;
- схема крест, согласно которой обе производные вычислялись как центральные разности.

Указанные схемы позволили существенно повысить эффективность расчета интенсивности.

Далее представлены результаты численного моделирования дифракции на клине с  $\delta = 0,877$  (в действительности произвольное задание угла моделировалось величиной  $\delta = 0,876\ 543\ 21$ ) для ТЕ и ТМ волн. Характеристики дифрагирующих волн рассматриваются при  $\rho = 30$ , что соответствует ближней зоне. На рис. 4 показаны угловые распределения интенсивности. В зонах, где пересекаются две волны, падающая и отраженная от грани клина, видим картину интерференции. Интенсивность меняется от нуля до двух (рис. 4а), до трех (рис. 4в, е) и даже до 3,7 (рис. 4д). В зонах, где имеется

одна падающая волна (она же прошедшая), на каждом графике (см. рис. 4) интенсивность близка к единице. На краях этой зоны при переходе к геометрической тени или к области с двумя пересекающимися волнами единичная интенсивность возмущена эффектом дифракции. Амплитуда дифракционных колебаний интенсивности может достигать величины 1,7.

На рис. 4а представлен случай падения плоской волны на верхнюю грань клина под углом  $\pi/3$ . Здесь имеется только одно отражение от верхней грани клина. В связи с чем наблюдается зона интерференции и падающей (прошедшей) волны, которая плавно переходит в область тени. На рис. 4б представлен вариант нормального падения плоской волны на верхнюю грань клина. Здесь падающая и отраженная от верхней грани клина волны гасят друг друга, поэтому интенсивность в зоне интерференции существенно меньше единицы. Имеется зона падающей волны с интенсивностью близкой к 1, которая при переходе в область тени возмущена дифракцией. На рис. 4в показан вариант падения плоской ТЕ волны, имеющей волновой вектор, параллельный нижней грани клина. Здесь имеется зона интерференции с размахом амплитуды интенсивности от нуля до трех, зона падающей (прошедшей) волны с интенсивностью, близкой к единице, и зона дифракции вблизи нижней грани клина. Электромагнитное поле ТЕ волны отжимается от нижней грани и поэтому размах дифракционных максимумов достигает величины 1,7. Он несколько больше, чем в случае, когда имеется зона тени, между краем прошедшей плоской волны и нижней стенкой клина. На рис. 4е показан зеркально-симметричный вариант, соответствующий волновому вектору исходной ТЕ волны, параллельному верхней грани клина. На рис. 4г представлен вариант, аналогичный случаю рис. 4в, только для ТМ волны. Здесь поле не обращается в ноль на нижней грани, наблюдается эффект подавления дифракции вблизи нижней стенки клина.

На рис. 4д представлен симметричный вариант, когда плоская волна падает под углом  $\gamma = \pi - \delta/2$ . В этом случае происходят два отражения под одинаковыми углами от разных граней клина.

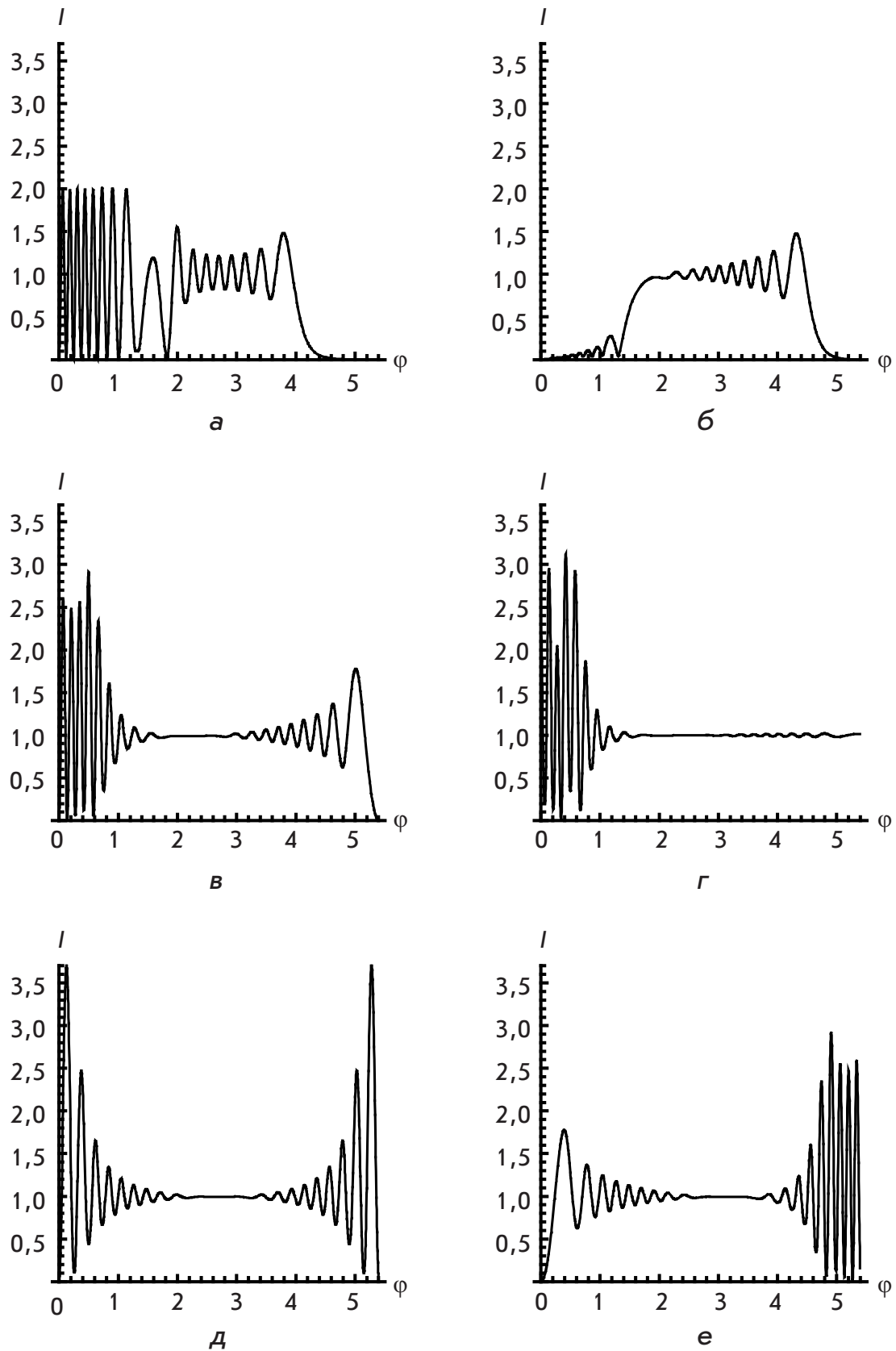


Рис. 4. Угловые распределения интенсивности  
 Дифракция плоской волны на клине с углом  $\delta = 0,877$ ,  $\rho = 30$ :  
 а —  $\gamma = \pi/3$  (TE); б —  $\gamma = \pi/2$  (TE); в —  $\gamma = \pi - \delta$  (TE); г —  $\gamma = \pi - \delta$  (TM);  
 д —  $\gamma = \pi - \delta/2$  (TE); е —  $\gamma = \pi$  (TE)

Подведем итоги по численному исследованию дифракции электромагнитной волны:

1. Представление известного решения уравнения Гельмгольца [10; 14; 24] позволяет выделять плоские волны без использования логических неравенств в произвольной области углов падения плоской волны на клин. Показано, что известное решение задачи удовлетворяет принципу зеркальной симметрии.

2. Разработана математическая модель для численного расчета амплитуды и интенсивности дифракционного поля для клина с про-

извольным углом раствора при произвольном угле падения плоской волны. На основе модели рассчитаны характеристики дифракции как в дальней, так и в ближней зонах.

3. Обнаружен эффект отталкивания (отжимания) электромагнитного поля поверхностью клина в случае, когда волновой вектор падающей плоской ТЕ волны направлен вдоль этой поверхности.

4. Обнаружен эффект уменьшения дифракции электромагнитного поля вблизи поверхности клина для случая скользящего падения ТМ волны.

#### Список использованной литературы

1. Бабич В. М. Дифракция плоской волны на клине / В. М. Бабич, А. А. Мацковский // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2009. — Т. 369. — С. 5–15.
2. Бабич В. М. Метод Зоммерфельда-Малюжинца в теории дифракции / В. М. Бабич, М. А. Лялинов, В. Э. Грикуров. — СПб. : Изд-во СПбГУ, 2003. — 104 с.
3. Борн М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. — М. : Наука, 1973. — 720 с.
4. Боровский А. В. Дифракционный интеграл Франка-Зоммерфельда / А. В. Боровский, А. Н. Бородин. — Иркутск : Изд-во БГУЭП, 2012. — 64 с.
5. Боровский А. В. Дифракция на идеальном клине с произвольным углом / А. В. Боровский, А. Л. Галкин // Краткие сообщения по физике ФИАН. — 2014. — № 12 (в печати).
6. Боровский А. В. Математическая теория дифракции плоской волны на идеально проводящем клине / А. В. Боровский, А. Н. Бородин, А. Л. Галкин. — Иркутск : Изд-во БГУЭП, 2013. — 109 с.
7. Боровский А. В. Численное моделирование дифракции ТН волны на идеально проводящей полуплоскости / А. В. Боровский, А. Н. Бородин, А. Л. Галкин // Известия Иркутской государственной экономической академии. — 2012. — № 5 (85). — С. 124–130.
8. Боровский А. В. Численное моделирование дифракции ТН волны на прямоугольном клине / А. В. Боровский, А. Л. Галкин // Известия Иркутской государственной экономической академии. — 2013. — № 1 (87). — С. 110–116.
9. Боровский А. В. Численное моделирование эффектов дифракции / А. В. Боровский, А. Н. Бородин, А. Л. Галкин // Известия Иркутской государственной экономической академии (Байкальский государственный университет экономики и права) (электронный журнал). — 2012. — № 4. — URL : <http://eizvestia.isea.ru/reader/article.aspx?id=13859>.
10. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны, радио и связь / Л. А. Вайнштейн. — М. : Радио и связь, 1990. — 440 с.
11. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции / И. Н. Векуа. — М. : Физматгиз, 1959. — 628 с.
12. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. — 4-е изд., испр. и доп. — М. : Наука, 1981. — 512 с.
13. Гринберг Г. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений / Г. Гринберг. — М. ; Л. : Изд-во АН СССР, 1948. — 727 с.
14. Зоммерфельд А. Оптика / А. Зоммерфельд. — М. : Иностранная литература, 1953. — 486 с.
15. Котляр В. В. Расчет поля дифракции света на двумерных микрообъектах объединенным методом конечных граничных элементов / В. В. Котляр, Д. В. Нестеренко // Материалы XXVI школы по когерентной оптике и голографии. — Иркутск : Изд-во ИВВАИУ, 2008. — С. 371–382.
16. Ландау Л. Д. Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц // Теоретическая физика : учеб пособие : в 10 т. — М. : Наука, 1982. — Т. 8. — 621 с.
17. Леонтович М. А. Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности земли по методу параболического уравнения / М. А. Леонтович, В. А. Фок // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1946. — Т. 16, № 7. — С. 557.
18. Лялинов М. А. Дифракция акустических и электромагнитных волн в клиновидных и конусовидных областях с граничными условиями импедансного типа : дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.01.03 / М. А. Лялинов. — СПб., 2004. — 298 с.
19. Малюжинец Г. Д. Возбуждение, отражение и излучение поверхностных волн на клине с заданными импедансами граней / Г. Д. Малюжинец // Доклады Академии наук СССР. — 1958. — Т. 121. — С. 436–439.
20. Малюжинец Г. Д. Формула обращения для интеграла Зоммерфельда / Г. Д. Малюжинец // Доклады Академии наук СССР. — 1958. — Т. 118. — С. 1099–1102.



21. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1972. — 735 с.
22. Уфимцев П. Я. Теория дифракционных краевых волн в электродинамике. Введение в физическую теорию дифракции / П. Я. Уфимцев ; пер. с англ. А. В. Капцова. — М. : Бином, 2012. — 372 с.
23. Фок В. А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн / В. А. Фок. — М. : Наука, 1970. — 520 с.
24. Франк Ф. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики / Ф. Франк, Р. Мизес. — М. ; Л. : ОНТИ, 1937. — 996 с.
25. Carslaw H. S. Diffraction of waves by a wedge of any angle / H. S. Carslaw // Proc. London Math. Soc. — 1919. — № 18. — P. 291–306.
26. Kirchhoff G. Ann.d.physik / G. Kirchhoff. — 1883. — № 18. — P. 663.
27. Sommerfeld A. Mathematische Theorie der Diffraction / A. Sommerfeld // Mathematische Annalen. — 1896. — Vol. 47. — P. 317–374.
28. Keller J. B. Geometrical theory of diffraction / J. B. Keller // J. Opt. Soc. Am. 1962. — № 52. — P. 116–130.
29. Mathematical papers of the late George Green ; Ed. by N. M. Ferrers. — London : Ib Macmillan and co., 1871. — 336 p.
30. MacDonald H. M. Electric Waves / H. M. MacDonald. — Cambridge, MA : Cambridge Univ.Press, 1902. — P. 186–198.
31. Papadopoulos A. I. A corrected physical-optics solution to 3-d wedge diffraction / A. I. Papadopoulos, D. P. Chrissoulidis // Electromagnetics. — 2000. — № 20. — P. 79–98.
32. Reiche F. Die Beugung des Lichtes an einem ebenen, rechteckigen Keil von unendlicher Leitfähigkeit / F. Reiche // Annalen der Physik. — 1912. — P. 131–156.
33. Umul Y. Z. Modified theory of physical optics / Y. Z. Umul // Opt. Express. — 2004. — № 12. — P. 4959–4972.

#### References

1. Babich V. M., Matskovskii A. A. Diffraction of a plane wave on a wedge. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI — Proceedings of POMI scientific seminars*, 2009, vol. 369, pp. 5–15 (in Russian).
2. Babich V. M., Lyalinov M. A., Grikurov V. E. *Metod Zommerfelda-Malyuzhintsy v teorii difraktsii* [The method of Sommerfeld-Maluzhinets in the diffraction theory]. Saint Petersburg, SPGU Publ., 2003. 104 p.
3. Born M., Wolf E. *Principles of optics*. Oxford, Pergamon Press, 1969. (Russ. ed.: Born M., Volf E. *Osnovy optiki*. Moscow, Science Publ., 1973. 720 p.).
4. Borovsky A. V., Borodin A. N. *Difraktsionnyi integral Franka-Zommerfelda* [Frank-Sommerfeld diffraction integral]. Irkutsk, Baikal State University of Economics and Law Publ., 2012. 64 p.
5. Borovsky A. V., Galkin A. L. Diffraction by a perfectly conducting wedge with an arbitrary angle. *Kratkie soobshcheniya po fizike FIAN — Brief reports on Physics of Lebedev Physical Institute*, 2014, no. 12 (in print) (in Russian).
6. Borovsky A. V., Borodin A. N., Galkin A. L. *Matematicheskaya teoriya difraktsii ploskoi volny na idealno provodyashchem kline* [The mathematical theory of plane wave diffraction by a perfectly conducting wedge]. Irkutsk, Baikal State University of Economics and Law Publ., 2013. 109 p.
7. Borovsky A. V., Borodin A. N., Galkin A. L. Numerical simulation of a TH wave diffraction on a perfectly conducting half plane. *Izvestiya Irkutskoy gosudarstvennoy ekonomicheskoy akademii — Izvestiya of Irkutsk State Economics Academy*, 2012, no. 5 (85), pp. 124–130 (in Russian).
8. Borovsky A. V., Galkin A. L. Numerical simulation of TH wave diffraction by a right-angled wedge. *Izvestiya Irkutskoy gosudarstvennoy ekonomicheskoy akademii — Izvestiya of Irkutsk State Economics Academy*, 2013, no. 1 (87), pp. 110–116 (in Russian).
9. Borovsky A. V., Borodin A. N., Galkin A. L. Numerical simulation of diffraction effects. *Izvestiya Irkutskoy gosudarstvennoy ekonomicheskoy akademii (Baykalskiy gosudarstvennyy universitet ekonomiki i prava) (elektronnyy zhurnal) — Izvestiya of Irkutsk State Economics Academy (Baikal State University of Economics and Law) (online journal)*, 2012, no. 4. Available at: <http://eizvestia.isea.ru/reader/article.aspx?id=13859> (in Russian).
10. Vainshtein L. A. *Elektromagnitnye volny, radio i svyaz* [Electromagnetic waves, radio and communications]. Moscow, Radio and Communications Publ., 1990. 440 p.
11. Vekua I. N. *Obobshchennye analiticheskie funktsii* [Generalized Analytic Functions]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959. 628 p.
12. Vladimirov V. S. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Mathematical Physics Equations]. 4<sup>th</sup> ed. Moscow, Nauka Publ., 1981. 512 p.
13. Grinberg G. *Izbrannye voprosy matematicheskoi teorii elektricheskikh i magnitnykh yavlenii* [Selected issues of mathematical theory of electric and magnetic phenomena]. Moscow, Leningrad, AN SSSR Publ., 1948. 727 p.
14. Zommerfeld A. *Optika* [Optics]. Moscow, Foreign Literature Publ., 1953. 486 p.
15. Kotlyar V. V., Nesterenko D. V. Calculation of the light diffraction field on two-dimensional micro objects combined by the method of finite boundary elements. *Materialy XXVI shkoly po kogerentnoi optike i golografii* [Materials of the 26th school of coherent optics and holograph]. Irkutsk, IVVAIU Publ., 2008. Pp. 371–382 (in Russian).
16. Landau L. D., Lifshits E. M. *Elektrodinamika sploshnykh sred* [Electrodynamics of continua]. In *Teoreticheskaya fizika* [Theoretical physics]. Moscow, Science Publ., 1982. Vol. 8. 621 p.

17. Leontovich M. A., Fok V. A. Solution of the problem of electromagnetic waves propagation along the earth's surface by the method of parabolic equation. *Zhurnal eksperimentalnoi i teoreticheskoi fiziki — Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1946, vol. 16, no. 7, pp. 557 (in Russian).
18. Lyalinov M. A. *Difraktsiya akusticheskikh i elektromagnitnykh voln v klinovidnykh i konusovidnykh oblastyakh s granichnymi usloviyami impedansnogo tipa. Dokt. Diss.* [Diffraction of acoustic and electromagnetic waves in wedge-shaped and cone-shaped areas with boundary conditions of impedance type. Doct. Diss.]. Saint Petersburg, 2004. 298 p.
19. Malyuzhinets G. D. Excitation, reflection and emission of surface waves on a wedge with given faces impedances. *Doklady Akademii nauk SSSR — Reports of the Academy of Sciences of the USSR*, 1958, vol. 121, pp. 436–439 (in Russian).
20. Malyuzhinets G. D. Inversion formula for the Sommerfeld integral. *Doklady Akademii nauk SSSR — Reports of the Academy of Sciences of the USSR*, 1958, 1958, vol. 118, pp. 1099–1102 (in Russian).
21. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Mathematical Physics Equations]. Moscow, Science Publ., 1972. 735 p.
22. Ufimtsev P. Ya. *Teoriya difraktsionnykh kraevykh voln v elektrodinamike. Vvedenie v fizicheskuyu teoriyu difraktsii* [The theory of diffraction edge waves in electrodynamics. Introduction to the physical theory of diffraction]. Moscow, Вином Бином, 2012. 372 p.
23. Fok V. A. *Problemy difraktsii i rasprostraneniya elektromagnitnykh voln* [Problems of diffraction and electromagnetic waves propagation]. Moscow, Science Publ., 1970. 520 p.
24. Frank F., Mizes R. *Differentsialnye i integralnye uravneniya matematicheskoi fiziki* [Differential and integral equations of mathematical physics]. Moscow, Leningrad, ONTI Publ., 1937. 996 p.
25. Carslaw H. S. Diffraction of waves by a wedge of any angle. *Proc. London Math. Soc.*, 1919, no. 18, pp. 291–306.
26. Kirchhoff G. *Ann.d.physik.* 1883, no. 18, pp. 663.
27. Sommerfeld A. Mathematische Theorie der Diffraction. *Mathematische Annalen*, 1896, vol. 47, pp. 317–374.
28. Keller J. B. Geometrical theory of diffraction. *J. Opt. Soc. Am.* 1962, no. 52, pp. 116–130.
29. Ferrers N. M. (ed.) *Mathematical papers of the late George Green*. London, lb Macmillan and co., 1871. 336 p.
30. MacDonald H. M. *Electric Waves*. Cambridge, MA : Cambridge Univ. Press, 1902, pp. 186–198.
31. Papadopoulos A. I., Chrissoulidis D. P. A corrected physical-optics solution to 3-d wedge diffraction. *Electromagnetics*, 2000, no. 20, pp. 79–98.
32. Reiche F. Die Beugung des Lichtes an einem ebenen, rechteckigen Keil von unendlicher Leitfähigkeit. *Annalen der Physik*, 1912, pp. 131–156.
33. Umul Y. Z. Modified theory of physical optics. *Opt. Express*, 2004, no. 12, pp. 4959–4972.

#### Информация об авторах

Боровский Андрей Викторович — доктор физико-математических наук, профессор, кафедра информатики и кибернетики, Байкальский государственный университет экономики и права, 664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11, e-mail: andrei-borovskii@mail.ru.

Галкин Андрей Леонидович — доктор физико-математических наук, заведующий сектором, Институт общей физики РАН им. А.М. Прохорова, 119991, г. Москва, ул. Вавилова, 38, e-mail: galkin@kapella.gpi.ru.

#### Authors

Borovsky Andrey Victorovich — Doctor habil. (Physical and Mathematical Sciences), Professor, Department of Informatics and Cybernetics, Baikal State University of Economics and Law, 11 Lenin St., 664003, Irkutsk, Russia, e-mail: andrei-borovskii@mail.ru.

Galkin Andrey Leonidovich — Doctor habil. (Physical and Mathematical Sciences), Division Head, General Physics Institute of RAS n.a. A.M. Prokhorov, 38 Vavilov St., 119991, Moscow, Russia, e-mail: galkin@kapella.gpi.ru.